UNA PROPUESTA PARA COADYUVAR LA INTRODUCCIÓN DE ECUACIONES LINEALES: EL CASO DE LA TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE COMÚN AL LENGUAJE ALGEBRAICO Y VICEVERSA

Martha Iris Rivera López, Javier García García, Catalina Navarro Sandoval
Universidad Autónoma de Guerrero
caneiris_037@hotmail.com, gagj_87@hotmail.com, nasacamx@yahoo.com.mx

Resumen
Las matemáticas son producto del quehacer humano y su proceso de construcción está sustentado en abstracciones sucesivas. Muchos desarrollos importantes de esta disciplina han partido de la necesidad de resolver problemas concretos, propios de los grupos sociales. Sin embargo, al presentarse un contenido matemático en el aula, el profesor se enfrenta al problema de que dicho conocimiento no es comprendido por todos los estudiantes, por lo que debe buscar la manera adecuada de conducir el proceso enseñanza-aprendizaje de forma tal que logre forjar en su mente el ente matemático que se esté trabajando. Por la propia experiencia docente se identificaron algunas dificultades al abordar el tema la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa, con estudiantes de Bachillerato, lo cual nos orilló a elaborar y proponer una propuesta que coadyuve al estudiante a entender ecuaciones de primer grado con una incógnita partiendo de situaciones dadas en lenguaje común y lenguaje algebraico, y viceversa, como objetivo de esta investigación.
Palabras Clave: *Lenguaje Algebraico, Lenguaje Común, Ecuaciones lineales*

Introducción

Con el surgimiento del álgebra simbólica en el siglo XVI**,** nace un lenguaje propio de la Matemática, cuya principal característica es la de ser un lenguaje que se auto explica, es decir, en él no sólo es factible expresar los teoremas sino también demostrarlos. Sin embargo, no siempre fue así, puesto que durante mucho tiempo, el lenguaje natural y la geometría fueron medios imprescindibles de expresión y validación de las verdades algebraicas. Esta presentación final del álgebra, es la que en un tiempo trató de comunicarse a los estudiantes mediante la enseñanza escolar, lo cual condujo a una profunda crisis (Esquinas 2008).
Es por ello que en las dos últimas décadas, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra ha sido un tema destacado en las investigaciones didácticas. Y es través de ellas que conocemos algunas de las dificultades que tienen los estudiantes de los distintos niveles educativos respecto a los conceptos algebraicos: las diferentes interpretaciones que hacen del uso de las letras, los convenios de notación, los diferentes usos del signo igual, la traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje algebraico, las cuestiones relacionadas con el planteamiento y resolución de ecuaciones (Rojano, 1994). Aunado a ello, Arzarello, Bazzini, Chiappini (1995), (citado en Ortiz, 1997) reportan que algunos estudiantes no manejan el «significado» de los símbolos que han aprendido formalmente, dando nuevas interpretaciones que suelen tener sus propias justificaciones e inspirados en modelos previamente aprendidos, lo cual dificulta superar tales dificultades y errores conceptuales.
Ahora bien, la manera en que se presentan en libros de texto y la forma en que se enseñan en el salón de clase los temas de álgebra de primer año de bachillerato, resultan abstractos y difíciles de comprender por parte de los estudiantes, lo cual se ve reflejado en los altos índices de reprobación, por lo que es necesario construir actividades que logren facilitar el aprendizaje en los estudiantes. Y en ese sentido, planteamos abordar el tema de traducción del lenguaje común al algebraico y viceversa, en la construcción de ecuaciones lineales con una incógnita.

Puesto que la traducción es una etapa primordial en el planteamiento y resolución de problemas contextualizados, se considera elemento central para establecer un modelo matemático (Camarena, 1999). Por ello se necesita realizar con éxito el tránsito del lenguaje natural, en el que se comuniquen los problemas, al lenguaje algebraico, para representarlo matemáticamente. Sin embargo, dicho éxito depende en gran medida del conocimiento de los conceptos y modelos que menciona el enunciado, así como del grado de familiaridad que el alumno tenga con ellos (Olazábal, 2005). En síntesis concluimos que, para el planteamiento de ecuaciones a partir de un enunciado, los estudiantes del nivel bachillerato presentan serias dificultades. En particular, cuando se trabaja con el tema de traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa, para modelar ecuaciones lineales con una incógnita, la gran mayoría de los estudiantes de nivel bachillerato siguen presentando dificultades. Lo que nos orilló a elaborar una propuesta que coadyuve al estudiante a entender ecuaciones de primer grado con una incógnita partiendo de situaciones dadas en lenguaje común y en lenguaje algebraico.

Marco teórico y metodología

Se hace uso de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) como marco teórico, la cual considera que el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades, desequilibrios, conflictos, etc. y como metodología optamos por la Ingeniería Didáctica, la cual nos dará las pautas a seguir para el diseño de una propuesta, la cual deberá tomar en cuenta los conocimientos previos que tienen los alumnos, e invitarlos a interactuar con sus pares y su profesor en un medio regido por el contrato didáctico. Por lo que seguimos, el esquema metodológico siguiente:

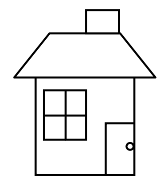
1. Identificar la problemática en torno a nuestro tema de investigación, con base en investigaciones realizadas.
2. Realizar los análisis epistemológico, cognitivo y didáctico sobre la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico, y viceversa.
3. Realizar el diseño de una secuencia didáctica, tomando en cuenta los puntos anteriores.
4. Una vez concluida la secuencia, se aplicó en dos módulos de 50 minutos, iniciando implícitamente la etapa de acción y explícitamente la etapa de formulación de la TSD, y en ambos módulos se aplicó la secuencia con un total de 30 alumnos, distribuidos en 10 equipos de 3 integrantes cada uno.
5. Finalizada la aplicación de la secuencia, se ocupó un módulo para entrevistar y para que cada equipo explicara a sus compañeros sus soluciones, así como de aquello que les llevó a contestar las preguntas de cierta manera.
6. Por último, se analizaron los resultados obtenidos en la secuencia, contrastando al final los resultados obtenidos con la secuencia y los obtenidos por el análisis cognitivo.

Por el análisis epistemológico sabemos que el Álgebra clásica nace como generalización de la aritmética, para la resolución de ecuaciones y el estudio de las operaciones y sus propiedades, identificándose en la historia tres tipos de Álgebra: Álgebra retórica (etapa anterior a Diofanto de Alejandría), Álgebra sincopada (Desde Diofanto hasta el siglo XVI, con Vieta) y Álgebra simbólica (desde Vieta hasta nuestros días), pero no encontramos un indicio claro de cómo se trabajaba la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico, y viceversa. Del análisis didáctico encontramos que en todos los grados de primaria se abordan contenidos que sirven como conocimientos previos para el tema que nos compete, además la formalización de tales contenidos se va dando conforme al grado, logrando así que el alumno haga suyo el lenguaje matemático y con ello, contribuya a su fácil aceptación en el nivel secundaria, de donde

observamos que sólo en primer grado se aborda nuestro tema de interés, lo mismo que en el Nivel Medio Superior (NMS, que sólo se aborda en el primer semestre).
Ahora bien, para el análisis cognitivo aplicamos un cuestionario de exploración que constó de ocho preguntas, el cual nos permitió apreciar las dificultades que tienen los estudiantes respecto a aquellos conocimientos que son necesarios para abordar el tema que nos compete. Dicho cuestionario evidenció que los principales conceptos puestos en juego no están del todo comprendidos por los estudiantes, y por ello nos hemos dado a la tarea de proporcionar una secuencia didáctica con la cual el estudiante pueda mirar la importancia de cada conocimiento puesto en juego.

La propuesta se aplicó a un grupo de estudiantes de primer grado de la Unidad Académica Preparatoria Núm. 1 “Profr. Aarón M. Flores”, ubicada en Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, la cual está integrada de nueve actividades, las ocho primeras permitirán al alumno interactuar con la última actividad, en la cual se verá reflejada la capacidad (de los alumnos) de detección de una incógnita en una situación problemática y escribir la ecuación formal correspondiente, así como la interpretación en lenguaje común una expresión algebraica que denota una ecuación lineal con una incógnita. A continuación se presenta el diseño, el cual se obtuvo después de los tres análisis anteriores tomados como base para formular el mismo.

Diseño



1. Juan es ciego y se le pide construir la siguiente figura. Díctenle de la forma más clara posible, cómo hacerla. (Nota: Juan conoce muy bien los triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágono, hexágono, círculos, trapecios, rombos y otras figuras geométricas)
2. En la operación siguiente el cuadro en blanco representa un número cualquiera. Elijan, de entre estas tres opciones, la que mejor describa la operación que debes realizar con dicho número: □

a) Toma el número y multiplícalo por 7.
b) Toma el número, multiplícalo por 7 y súmale 4.
c) Toma el número, $\cdot 7 + 4$ multiplícalo por 7 más 4.

3. La siguiente tabla muestra tres columnas. La primera de ellas da una información matemática que debe corresponderse con la operación de la segunda. La tercera columna expresa la misma operación pero sin números, es decir, de forma general, de manera que los cuadros en blanco puedan representar cualquier número. Completen las casillas como los ejemplos dados:

Enunciado	Operación aritmética	Operación algebraica
Tengo 3 mangos y me dan 7 más.	$3 + 7$	□+□
La entrada al museo cuesta $25 y fui cuatro veces esta semana.	$4 \cdot 25$	□·□
Tengo 27 paletas y las reparto entre 9 niños.		
	$9 - 5$	
		□+□·□

4. Encuentren los números desconocidos (representados por letras) que hacen falta en los siguientes incisos, para que se en cada uno de éstos se cumpla la igualdad establecida:

a) $4 + t = 20$ b) $32 - w = 21$
c) $z + 12 = 36$ d) $m - 8 = 15$

¿Existen otros números que cumplan también la igualdad establecida en cada inciso, aparte de los que encontraron? ¿Qué otros números también cumplirían cada igualdad?
Y si son únicos ¿Qué nombre le darían a esos números desconocidos que se deben encontrar para satisfacer una igualdad?

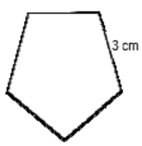
5. Expliquen qué relación existe entre cada pareja de números de la tabla siguiente:

A	B
3	9
10	30
7	21
4	12

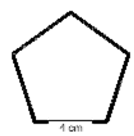
¿Pueden expresarla mediante una operación? ______________________________
Si su respuesta es sí, en la primera columna de la siguiente tabla, expresen la operación con sus propias palabras de manera que sirva para todos esos ejemplos y otros que sigan la misma relación, y en la segunda columna expresen la operación matemáticamente.

Enunciado	Traducción

6. El perímetro de un pentágono se calcula mediante la fórmula , donde es la longitud de cada uno de sus lados. Calculen el perímetro de los siguientes pentágonos.

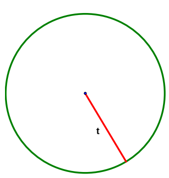


P=



P=

7. El perímetro de un círculo, se calcula multiplicando *el doble de la longitud del radio por el número pi*. Expresen el perímetro del siguiente círculo en función de la longitud del radio que se les da.



FÓRMULA:

P=

8. Piensen en un número, multiplíquenlo por 2, súmenle 4, divídanlo entre 2, réstenle el número que habían pensado.

¿Qué resultado obtienen? ___________ ¿Se obtiene el mismo resultado con otros números diferentes? ___________ ¿Por qué creen que ocurre?
¿Pueden expresar este enunciado de manera que sirva para cualquier número que piensen, sin especificar cuál?

9. En la siguiente tabla, cada enunciado debe corresponderse con la expresión matemática que está a su derecha, es decir, con la columna titulada traducción. Completen las casillas en gris:

Enunciado	**Traducción**
David tiene un amigo 7 años mayor que se llama Marcos. Si la edad de David es años, ¿Cuántos tiene Marcos?	
Pablo y Santiago tienen canicas, Pablo tiene 13 y entre los dos tienen 34. ¿Cuántas canicas tiene Santiago?	

	$w + 3 = 17$
	$n - 11 = 25$
El largo de un rectángulo mide lo triple que el ancho. ¿Cuál es la longitud del largo si el perímetro del rectángulo es 12 cm?	

Análisis de Resultados y discusión

Se presentará un análisis de algunas respuestas (las más significativas desde nuestro punto de vista).

Pregunta 2: El 70% de los equipos contestó de manera incorrecta (eligiendo la opción c) ya que no se priorizan las operaciones, mientras que el 30% lo hace correctamente, empero no podemos deducir que todos los integrantes presentan esta dificultad, ya que durante la discusión entre los integrantes de cada equipo se dio por que al menos un integrante pensaba en la opción correcta, sin embargo, no pudiendo defender ni fundamentar su respuesta para convencer a los demás integrantes del equipo y además por ser mayoría terminaban con la discusión

En la etapa de formulación los estudiantes expresaban que se encontraron muy confundidos al contestar la pregunta, ya que no encontraban diferencia entre el inciso b y el inciso c.

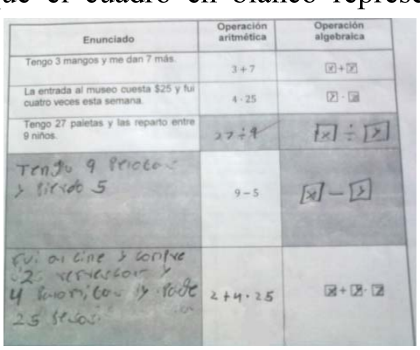
Entrevistador: ¿Los enunciados expresan lo mismo?

Alumno 1: Pues no, pero ¿cuál es la diferencia?, es que nosotros nos basamos en que ahí está la palabra "más" y en la expresión esta el signo "más"

Alumno 2: Es que ahí dice súmale y ahí pues se le está sumando 4, pero para mí, no es mucho la diferencia al decir "súmale" y "más".

Vislumbrándose que gran parte de los estudiantes no identifican prioridad en las operaciones, al menos textualmente, dado que aun realizando operaciones correctamente, no entendían el significado de sus resultados.

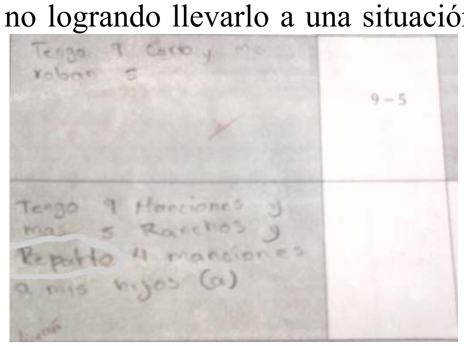
Pregunta 3:Todos los equipos logran completar acertadamente las filas 4 y 5, donde sólo se privilegia una operación, sin embargo, un equipo no quiso dejar de lado la idea que tiene sobre incógnita, ya que a pesar de que se le dieron las instrucciones y se especificó en la instrucción que el cuadro en blanco representaba cualquier número, este equipo quizo mirarlo como lo aprendió o lo concibió (figura 1), sin embargo, la mayoría en la última fila, donde se reafirmaba lo que contestaron en la pregunta 2 notamos que tuvieron serias dificultades, ya que el 40% de los equipos le atribuyen la prioridad a la suma, y solo el 30% mostró coherencia en sus enunciados, sin embargo el 10% de estos describió el enunciado como si leyera una operación aritmética, no logrando llevarlo a una situación de la vida cotidiana.



Enunciado	Operación aritmética	Operación algebraica
Tengo 3 mangos y me dan 7 más.	3 + 7	[illegible] + [illegible]
La entrada al museo cuesta $25 y fui cuatro veces esta semana.	4 · 25	[illegible] · [illegible]
Tengo 27 paletas y las reparto entre 9 niños.	27 ÷ 9	[x] ÷ [y]
[illegible]	9 − 5	[x] − [y]
[illegible]	2 + 4 · 25	[illegible] + [illegible] · [illegible]

Figura 1

El resto de los equipos propusieron enunciados que involucran más de una incógnita, atribuyendo a la multiplicación el significado de reparto (figura 2).



Tengo 9 Carro y me roban 5	9 − 5
Tengo 9 Mansiones y más 5 Ranchos y Reparto 4 mansiones a mis hijos (a)	

Analizando las respuestas de los equipos, podemos percibir dificultad al distinguir términos semejantes, dificultad antes confirmada en el cuestionario de exploración.

En la Pregunta 8, la mayoría de los equipos respondieron que el resultado es 2 y que siempre será ese, pero no encuentran explicación del por qué ocurre, excepto un equipo que responde que es 8 y concluyen que no ocurre lo mismo, porque “son diferentes números”, consecuencia de no realizar las operaciones correctamente.

Algunas de las justificaciones por parte de los alumnos son:
Equipo1: Se debe a que es el mismo procedimiento para cualquier número
Equipo 2: Porque se tratan de números pares (sin especificar a quienes se refieren, ya que pueden ser aquellos con los que experimentaron, o los que están presentes en la expresión)
Equipo 3: se debe a que tiene las cuatro operaciones básicas suma, resta, multiplicación y división.
Algunas justificaciones eran ambiguas ya que no se entendía lo que intentaban comunicar (figura 3).

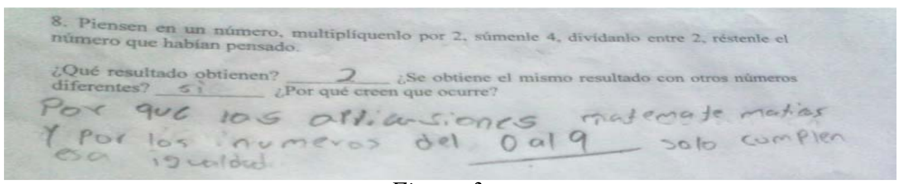

8. Piensen en un número, multiplíquenlo por 2, súmenle 4, divídanlo entre 2, réstenle el número que habían pensado.
¿Qué resultado obtienen? 2 ¿Se obtiene el mismo resultado con otros números diferentes? si ¿Por qué creen que ocurre?
Por que los operaciones matematematias Y Por los numeros del 0 al 9 solo cumplen en igualdad.

Figura 3

En la etapa de formulación la mayoría tendía a repetir su respuesta inicial, algunos comentaban que no sabían, pero que ese ejercicio se les hacia familiar, por que se los enseñaron en la primaria o secundaria, pero que no recordaban la explicación que sus maestros les habían dado, pero que tenía que ver con las operaciones.
Además, parecía ser que los estudiantes se preocuparon mas por recordar lo que sus maestros les habían dicho, y no por lograr una justificación adecuada. En la etapa de formulación solo un equipo justificó de distinta manera:

Equipo 8: *“por el número que multipliques le tienes que sumar el doble”*, por ejemplo:

$\{[(x \cdot 3) + 6] \div 3\} - x = 2$ (Hacen las operaciones respectivas) y es el mismo resultado para otros números, pero *“solo considerando que por cualquier número que multipliques siempre le tienes que sumar el doble y dividirlo por el número que ocupamos para multiplicar”,*

En general, el 30% de los equipos contestan que no pueden expresar el enunciado como se pide, el 50% de los equipos intentan expresarla, aunque ninguno es correcto pero al menos hay aproximación a lo que se pedía (figura 4), el resto solo escriben que si lo pueden expresar sin justificar.

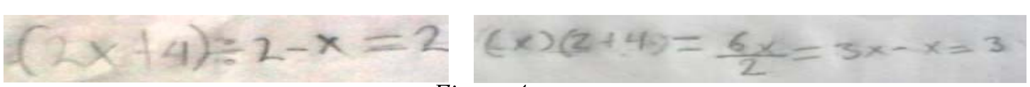


Figura 4

Como reflexión a la respuesta que dieron los alumnos, se percibió que algunos equipos lograron dar significado a la multiplicación antes de la suma, sin embargo otros se aferran a sus ideas iniciales, además de mantener la dificultad al operar con términos semejantes.

Pregunta 9: En esta actividad se presenta ambos lenguajes que involucran la modelación de una ecuación lineal con una incógnita, de la que se obtuvo que el 30% de los alumnos no mostró problemas en el transito del lenguaje común a lenguaje algebraico, no así para el proceso inverso que fue donde hubo muchas más dificultades, siendo este el aspecto en el que no se hace mucho énfasis durante el proceso de enseñanza-aprendizaje en los distintos niveles de Educación.

Por ejemplo cuando se les pide que escriban un enunciado, con el cual se representará la expresión dada, es decir de un lenguaje algebraico, $w + 3 = 17$, el 40% de los equipos propone un enunciado correcto para la expresión algebraica de los cuales podemos deducir, que estos equipos lograron darle significado a cada elemento que estaba en la expresión, puesto que la aplicación del modelo no es tan directo, por ejemplo, escribieron:

- “Gaby tiene una bolsa de manzanas pero no sabemos cuántas hay en la bolsa, pero Isa tiene 3 manzanas y en total serian 17 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Gaby?”

Este enunciado es correcto al menos en esencia ya que se percibe que la idea peana para traducir esta expresión fue en base a algunos de los ejercicios propuestos.

Algunos enunciados erróneos son:

- “Lety tiene 3 años más que su amiga Laura. ¿Cuántos años tiene Lety?”
- “Pablo tiene un amigo 3 años mayor que se llama Santiago. Si la edad de Santiago es w ¿Cuántos años tiene Pablo?”

Al analizarlos nos percatamos de que faltaron datos por considerar y refleja el mal uso de su lenguaje común, y por ello es necesario ampliar más su vocabulario.

De manera general una mínima parte de los equipos logró transitar del lenguaje común al algebraico, pero no así con el proceso inverso, ya que se percibió que los alumnos no le dan significado a la operación que figura en la ecuación, lo que los conlleva a proponer un problema absurdo. No fue posible realizar la formulación de este apartado, pero por las respuestas de los estudiantes podemos decir que las dificultades se agravan cuando aumenta el número de operaciones en los problemas.

Conclusión

Comparando las concepciones obtenidas del análisis cognitivo respecto a las de la propuesta, hubo un leve mejoramiento, como el reconocimiento del uso parcial de la incógnita, la interpretación de expresiones algebraicas, así como la importancia del manejo de un lenguaje apropiado tanto coloquial como matemático.

Cabe recalcar que el error de los alumnos fue abordar las actividades como algo aislado, lo cual les impidió avanzar en cuanto a los conocimientos que debieron formarse para abordar la última actividad, que es en donde se centra con mayor énfasis el propósito que teníamos, puesto que la pregunta que engloba a las precedentes, las cuales son necesarias para poder abordar de manera satisfactoria dicha pregunta, sin embargo, el compromiso que adoptaron frente a la secuencia no fue el adecuado, puesto que en algunos equipos se notó el desinterés, que pudo haber sido el otro factor que influyera en los resultados alcanzados, que de manera sintetizada se puede decir, que al menos una parte de los equipos si logra transitar del lenguaje común al algebraico, pero no así con el proceso inverso, puesto que la mayoría de ellos, tuvieron serias dificultades para el proceso inverso, lo cual nos deja ver que el propósito inicial no se cumple cabalmente.

Se sugiere que desde el inicio de la aplicación se tengan en cuenta las variables didácticas necesarias para obtener resultados más satisfactorios, ya que las condiciones predominantes en el aula, no siempre son las adecuadas y menos las ideales, debido a que por un lado, los alumnos de bachillerato enfrentan serias dificultades al trabajar con conocimientos del álgebra y por otro, cuando trabajan con actividades que no repercutirán en su calificación no se le presta el interés necesario y por ello, no razonan sus respuestas y dan aquellas que primero se les viene a la mente, por lo que sugerimos que si esta secuencia es aplicada, se involucre más al grupo de forma tal que se vean comprometidos y se despierte el interés de ellos para participar en las actividades que se realicen con fines investigativos. Las respuestas obtenidas de la propuesta, nos permiten afirmar que a pesar de que se han realizado varias investigaciones respecto a este tema, las dificultades siguen persistiendo y ello, es en parte, por el complejo funcionamiento del sistema didáctico que resulta ser inadecuado, y por otra, podemos decir que nuestros logros no fueron del todo los esperados debido a que la propuesta contenía muchas actividades y el tiempo empleado para abordarlas no fue suficiente.

Referencias

Adán, V. (2004). *Diagnóstico de habilidades matemáticas que desarrollan los estudiantes de secundaria, en la transformación de lenguaje común al algebraico, en la resolución de problemas*. Tesis de licenciatura no publicada. Unidad Académica de Matemáticas nodo: Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero.

Esquinas, A. M. (2008). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente*. Memoria para optar al grado de Doctor publicada. Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid.

Filio, E., (2005). *El lenguaje y el aprendizaje de las matemáticas. Un estudio desde la teoría de Chomsky*. Tesis de Doctorado publicada. Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, Instituto Politécnico Nacional.

López, S. R. (2003). *La representación con variables en expresiones dadas en lenguaje común*. Tesis de licenciatura no publicada. Unidad Académica de Matemáticas nodo: Altamirano, Universidad Autónoma de Guerrero

Olazábal, A. M. (2005). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto*. Tesis de Maestría publicada. Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, Instituto Politécnico Nacional.

Ortiz, F. J. (2004). En Matemáticas I (pp. 67-69), *Lenguaje Algebraico,* México: Publicaciones cultural.

Ortiz, M. A. (1997). *El lenguaje algebraico en la escuela: cómo conseguir un equilibrio entre investigación y práctica.* Artículo extraído de *Uno. Revista Didáctica de las Matemáticas,* n. º 14, págs. 47-60, Octubre, Barcelona.

Rojano, T. (1993). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Recuperado en http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21329/93290 Brousseau, G (1986). Fundamentos y Métodos de la didáctica de las Matemáticas. Recuperado el 14 de septiembre de 2009 en www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/.../FundamentosBrousseau.pdf